УДК 517.977.56

Копець М.М., к.фіз.- мат.н., доц.;Сабол С.Ф. к.т.н., доц.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

ОТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ КОЛИВАННЯ СТРУНИ

Kopets M., Sabol S.
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine (optimal201214@yandex.ua, sabol1@ukr.net)

THE OPTIMIZATION OF THE PROCESS OF VIBRATION OF A STRING

У статті досліджується лінійно-квадратична задача оптимального керування процесом коливань струни. Актуальність цієї задачі не викликає сумнівів. На противовагу найбільш поширеним методам дослідження цієї задачі (принцип максимума Понтрягіна, метод динамічного програмування Беллмана), в статті використано метод множників Лагранжа. В результаті отримані необхідні умови оптимальності. Встановлені умови, що забезпечують єдиність оптимального керування. Отримано систему інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті та додаткові умови для неї. Розв'язок цієї системи дає можливість представити оптимальне керування в явній формі. Розглянуто конкретний приклад та графічну ілюстрацію основних результатів. В подальшому перспективним є дослідження систем функцій (14) та (16). Також цікаво розглянути аналогічну математичну модель із стохастичними параметрами.
Ключові слова: квадратичний функціонал; коливання струни; метод динамічного програмування Р. Белмана; метод множників Лагранжа; оптимальне керування; прнцип максимума Л. С Понтрягіна; система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті.

Вступ

В техніці та природі досить часто зустрічаються коливальні процеси. Приклади таких процесів можна знайти в акустиці, аеродинаміці, електродинаміці. механіці, квантовій теорії поля, теорії пружності і т. д. Майже всі ці процеси описуються диференціальними рівняннями (звичайними або з частиннми похідними) другого порядку. Вивченню коливальних процесів присвячена значна кількість наукових монорафій та статтей [1-3]. В одних випадках коливання можуть бути корисними, в інших – навпаки, шкідливими. Тому виникає потреба розумно керувати коливними процесами. Метою керування є гасіння небажаних коливань струни. Подібні проблеми досліджуються в теорії оптимального керування. Задачі оптимального керування коливальними процесами досить актуальні. Існує багато наукових досліджень з цієї тематики [4-8].

Основними інструментами для знаходження розв'язку задач оптимального керування є прнцип максимума Л. С Понтрягіна та метод динамічного програмування Р. Белмана. Однак ними не завжди можна скористатись, оскільки обидва ці методи вимагають, щоб система диференціальних рівнянь була розв'язана відносно старших похідних. Як приклад, можна назвати диференціально-алгебраїчні системи. В той же час для методу множників Лагранжа подібного обмеження не існує. Крім того, в багатьох випадках за допомогою цього методу можна знайти розвязок задачі оптимального керування більш ефективніше, ніж за допомогою двох вищезгаданих методів.

В статті досліджується задача оптимального керування процесом коливань струни. З допомогою методу множників Лагранжа авторами отримані необхідні умови оптимальності, виведена система диференціальних рівнянь Ріккаті, побудований точний розв'язок цієї системи, подані конкретний приклад та графічна ілюстрація отриманих результатів.

Постановка задачі

З багаторічного досвіду добре відомо, що для оцінки процесу гасіння одним із можливих способів є використання квадратичного функціонала. Досліджується задача мінімізації функціонала

$$I(u,z)=\frac{1}{2}\int_0^l z^2(t_1,x)dx+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t}\right]^2dx+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l[z^2(t,x)+u^2(t,x)]dxdt \tag{1}$$

на розв'язках краєвої задачі

$$\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2}+u(t)\,, \tag{2}$$

$$z(t_0,x)=f(x),\ \frac{\partial z(t_0,x)}{\partial t}=g(x)\,, \tag{3}$$

DOI: http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.78.65544

$$z(t,0)=0,\ z(t,l)=0\,, \tag{4}$$

де $0 \le x \le l$, $t_0 \le t \le t_1$, числа a, $t_0 \ge 0$, $t_1 \succ t_0$, $l \succ 0$ та функції $f(x) \in W_2^{1,0}(0,l)$ $g(x) \in L_2(0,l)$ задані. Розглянемо наступну множину:

$$\Omega = \left\{(t,x) : t \in [t_0, t_1], x \in [0,l]\right\}.$$

Функція $u(t,x) \in L_2(\Omega)$ називається допустимим керуванням. Для фіксованого допустимого керування $u(t,x)$ розв‘язком $z(t,x)$ задачі (2) – (4) вважається узагальнений розв‘язок $z(t,x) \in W_2^{1,0}(\Omega)$. Допустиме керування, на якому реалізується мінімальне функціонала (1), називається оптимальним керуванням.

Необхідні умови оптимальності

Використовуючи метод, запропонований в [6], приходимо до висновку.

Теорема 1.. Для знаходження єдиного оптимального керування $u(t,x)$ в задачі оптимізації (1) – (4) маємо наступну систему співвідношень:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + u(t), \\ z(t_0,x) = f(x),\ \dfrac{\partial z(t_0,x)}{\partial t} = g(x), \\ z(t,0)=0,\ z(t,l)=0, \\ \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 p(t,x)}{\partial x^2} + z(t,x), \\ p(t_1,x) = \dfrac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\ \dfrac{\partial p(t_1,x)}{\partial t} = -z(t_1,x), \\ p(t,0)=0,\ p(t,l)=0, \\ u(t,x)+p(t,x)=0, \end{cases} \tag{5}$$

де функція $p(t,x)$ – множник Лагранжа.

Система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті

Надалі всі рівності, пов’язані із дельта-функцією Дірака, слід розуміти як рівності в сенсі теорії узагальнених функцій. Враховуючи ту обставину, що система рівнянь (4) лінійна відносно невідомих $p(t,x)$ та $z(t,x)$ і беручи до уваги умови трансверсальності

$$p(t_1,x) = \frac{\partial z(t_1,x)}{\partial t},\ \frac{\partial p(t_1,x)}{\partial t} = -z(t_1,x), \tag{6}$$

розглядаємо наступну систему співвідношень

$$\frac{\partial\, p(t,x)}{\partial t} = -\int_0^l P_{11}(t,x,y)\, z(t,y)\, dy - \int_0^l P_{12}(t,x,y) \frac{\partial\, z(t,y)}{\partial t} dy\,, \tag{7}$$

$$p(t,x) = \int_0^l P_{21}(t,x,y)\, z(t,y)\, dy + \int_0^l P_{22}(t,x,y) \frac{\partial\, z(t,y)}{\partial t} dy\,, \tag{8}$$

Порівняння рівностей (6) та (7)-(8) приводить до наступних умов трансверсальності

$$\begin{cases} P_{11}(t_1,x,0) = \delta(x-y),\ P_{12}(t_1,x,0)=0, \\ P_{21}(t_1,x,0)=0,\ P_{22}(t_1,x,0) = \delta(x-y). \end{cases} \tag{9}$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. Якщо виконуються крайові умови

$$R_{21}(t,x,0)=0\,,\ R_{21}(t,x,l)\,,\ R_{22}(t,x,0)=0\,,\ R_{22}(t,x,l)\,, \tag{10}$$

то справедливе наступне твердження.

Теорема 2. Функції $P_{ij}(t,x,y)$ є розв‘язком нелінійної системи інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_{11}(t,x,y)}{\partial t}+a^2\left[\dfrac{\partial^2 P_{12}(t,x,y)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 P_{21}(t,x,y)}{\partial x^2}\right]+\delta(x-y)-\int\limits_0^l P_{12}(t,x,s)R_{21}(t,s,y)\,ds=0, \\ \dfrac{\partial P_{12}(t,x,y)}{\partial t}+a^2\,\dfrac{\partial^2 P_{22}(t,x,y)}{\partial x^2}+P_{11}(t,x,y)-\int\limits_0^l P_{12}(t,x,s)P_{22}(t,s,y)\,ds=0, \\ \dfrac{\partial P_{21}(t,x,y)}{\partial t}+a^2\,\dfrac{\partial^2 P_{22}(t,x,y)}{\partial y^2}+P_{11}(t,x,y)-\int\limits_0^l P_{22}(t,x,sP_{21}(t,s,y)\,ds=0, \\ \dfrac{\partial P_{22}(t,x,y)}{\partial t}+P_{12}(t,x,y)+P_{21}(t,x,y)-\int\limits_0^l P_{22}(t,x,s)P_{22}(t,s,y)ds=0. \end{cases} \tag{11}$$

задовольняють умовам трансверсальності (9) і крайовим умовам (10).

Побудова розвязку системи (11).

Оскільки має місце рівність

$$\delta(x-y)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ny}{l},$$

то функції $P_{ij}(t,x,y)$ шукаємо в такому вигляді

$$P_{ij}(t,x,y)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}p_{nij}(t)\sin\frac{\pi nx}{l}\sin\frac{\pi ny}{l}, \tag{12}$$

де $p_{nij}(t)$ – невідомі функції. В результаті приходим до такого висновку:

Теорема 3. Для знаходження функций $p_{nij}(t)$ отримано систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dp_{n11}(t)}{dt}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2[p_{n12}(t)+p_{n21}(t)]-p_{n12}(t)p_{n21}(t)+1=0, \\ \dfrac{dp_{n12}(t)}{dt}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 p_{n22}(t)+p_{n11}(t)-p_{n12}(t)p_{n22}(t)=0, \\ \dfrac{dp_{n21}(t)}{dt}-\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 p_{n22}(t)+p_{n11}(t)-p_{n22}(t)p_{n21}(t)=0, \\ \dfrac{dp_{n22}(t)}{dt}+p_{n12}(t)+p_{n21}(t)-p_{n22}^2(t)=0. \end{cases} \tag{13}$$

При цьому мають місце додаткові умови

$$\begin{cases} p_{n11}(t_1,x,0)=\delta(x-y),\ p_{n12}(t_1,x,0)=0, \\ p_{n21}(t_1,x,0)=0,\ p_{n22}(t_1,x,0)=\delta(x-y). \end{cases} \tag{14}$$

Зауваження. Порівяння другого та третього рівнянь системи (13) та відповідних умов (14) вказує на існування залежності $p_{n12}(t)=p_{n21}(t)$.

Системі рівнянь (13) можна поставити у відповідність матрицю $\mathbf{H}_n$ четвертого порядку

$$\mathbf{H}_n=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_n & \text{-}\mathbf{S}_n \\ -\mathbf{Q}_n & \text{-}\mathbf{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

де введено позначеня

$$\mathbf{A}_n=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_n^T=\begin{bmatrix} 0 & -\left(\dfrac{a\pi n}{l}\right)^2 \\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{F}_n=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{Q}_n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (13) можна записати як одне матричне диференцільне рівняння Ріккаті

$$\frac{d\mathbf{P}_n(t)}{dt}=-\mathbf{P}_n(t)\mathbf{A}_n-\mathbf{A}_n^T\mathbf{P}_n(t)+\mathbf{P}_n(t)\mathbf{F}_n\mathbf{P}_n(t)-\mathbf{Q}_n, \tag{15}$$

де матриця $\mathbf{P}_n(t)$ має вигляд

$$\mathbf{P}_n(t) = \begin{bmatrix} p_{n11}(t) & p_{n12}(t) \\ p_{n21}(t) & p_{n22}(t) \end{bmatrix}. \qquad (16)$$

Умови (14) в матричній формі будуть такими

$$\mathbf{P}_n(t_1) = \mathbf{I}\,, \qquad (17)$$

де символ $\mathbf{I}$ означає одиничну матрицю другого порядку. Матриця $\mathbf{H}_n$ має такі власні числа

$$\lambda_{n1} = -\alpha_n - i\beta_n\ \lambda_{n2} = -\alpha_n + i\beta_n\ \lambda_{n3} = \alpha_n - i\beta_n\ \lambda_{n4} = \alpha_n + i\beta_n$$

де $i^2 = -1$ та

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^4 + 1} - \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}{2}}\,,\ \beta_n = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^4 + 1} + \left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2}{2}}\,. \qquad (18)$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 4. Матрична експонента $\exp(\mathbf{H}_n \cdot t)$ має вигляд

$$\exp(\mathbf{H}_n t) = \mathbf{S}_n(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) & s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) & s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \\ s_{n31}(t) & s_{n32}(t) & s_{n33}(t) & s_{n34}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) & s_{n43}(t) & s_{n44}(t) \end{bmatrix},$$

де функції $s_{nij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, задані наступними формулами

$$\begin{cases} s_{n11}(t) = s_{n22}(t) = s_{n33}(t) = s_{n44}(t) = \cosh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), \\ s_{n21}(t) = -s_{n34}(t) = \alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) - \beta_n \cosh(\alpha_n t \sin(\beta_n t), \\ s_{n31}(t) = s_{n24}(t) = -\alpha_n \cosh(\alpha_n t \sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t), \\ s_{n41}(t) = s_{n23}(t) = -s_{n32}(t) = -s_{n14}(t) = \sinh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t), \\ s_{n12}(t) = -s_{n43}(t) = \dfrac{\alpha_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t) + \beta_n \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2}, \\ s_{n13}(t) = s_{n42}(t) = \dfrac{\alpha \cosh(\alpha_n t)\sin(\beta_n t) - \beta_n \sinh(\alpha_n t)\cos(\beta_n t)}{\alpha_n^2 + \beta_n^2}. \end{cases} \qquad (19)$$

Справедливість теореми 4 перевіряється за допомогою безпосереднього обчислення. Використовуючи метод, описаний в [8, с. 121], приходимо до такого твердження.

Теорема 5. Матрицю $\mathbf{P}_n(t)$ можна обчислити за допомогою формули

$$\mathbf{P}_n(t) = [\mathbf{F}_{n22}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n12}(t_1 - t)]^{-1}[\mathbf{F}_{n11}(t_1 - t) - \mathbf{F}_{n21}(t_1 - t)]\,, \qquad (20)$$

де використані позначення

$$\mathbf{F}_{n11}(t) = \begin{bmatrix} s_{n11}(t) & s_{n12}(t) \\ s_{n21}(t) & s_{n22}(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n12}(t) = \begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{n21}(t) = \begin{bmatrix} s_{n31}(t) & s_{n32}(t) \\ s_{n41}(t) & s_{n42}(t) \end{bmatrix},\ \mathbf{F}_{n12}(t) = \begin{bmatrix} s_{n13}(t) & s_{n14}(t) \\ s_{n23}(t) & s_{n24}(t) \end{bmatrix}..$$

Беручи до уваги формули (19) та (20), отримаємо наступне твердження.

Теорема 6. Для обчислення елементів матриці $\mathbf{P}_n(t)$ матимемо такі вирази

$$p_{n11}(t) = -\frac{q_{n11}(t_1 - t)}{\sigma_n(t_1 - t)}\,,\ p_{n12}(t) = p_{n21}(t) = \frac{q_{12}(t_1 - t)}{\sigma_n(t_1 - t)}\,,\ p_{n22}(t) = \frac{q_{n22}(t_1 - t)}{\sigma_n(t_1 - t)}\,, \qquad (21)$$

де функції $q_{n11}(t)$, $q_{n12}(t)$, $q_{n22}(t)$, $\sigma_n(t)$ мають наступний вигляд

$$q_{n11}(t) = (\alpha_n^2 + \beta_n^2)[(\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\cos(2\beta_n t) - (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\cosh(2\alpha_n t)] - 2\alpha_n \sin(2\beta_n t) - 2\beta_n \sinh(2\alpha_n t)\,,$$

$$q_{n12}(t) = 2\alpha_n\beta_n \cosh(2\alpha_n t) - \cos(2\beta_n t)]\ -\beta_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\sin(2\beta_n t) + \alpha_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\sinh(2\alpha_n t)\,,$$

$$q_{n22}(t) = (\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\cos(2\beta_n t) + (\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\cosh(2\alpha_n t)\ -2\alpha_n \sin(2\beta_n t) + 2\beta_n \sinh(2\alpha_n t)\,,$$

$$\sigma_n(t) = 2\beta_n^2 \cosh(2\alpha_n t) + 2\alpha_n^2 \cos(2\beta_n t)\ +\beta_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 + 1)\sinh(2\alpha_n t) + \alpha_n(\alpha_n^2 + \beta_n^2 - 1)\sin(2\beta_n t)\,.$$

У справедливості теореми 6 можна можна переконатися безпосередньою перевіркою.

Для ілюстрації отриманих результатів пропонуються три рисунки.

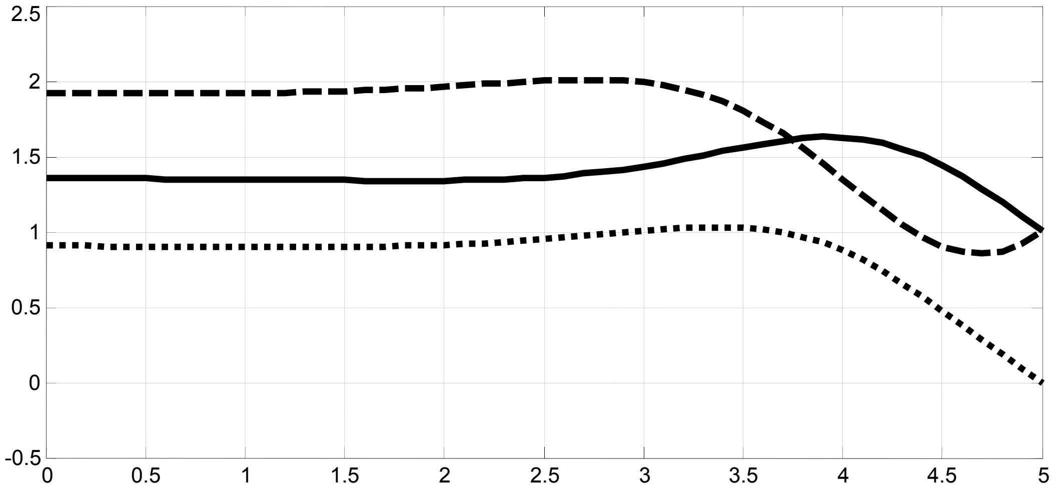

Рис. 1. Графік залежності p_{nij} (вертикальна вісь) від t при $n=1$ **, коли** $a=1$, $l=1$, $t_0=0$, $t_1=5$ ($p_{n11}(t)$ **- суцільна крива;** $p_{n12}(t)=p_{n21}(t)$ **- дрібна пунктирна крива;** $p_{n22}(t)$ **- пунктирна крива)**

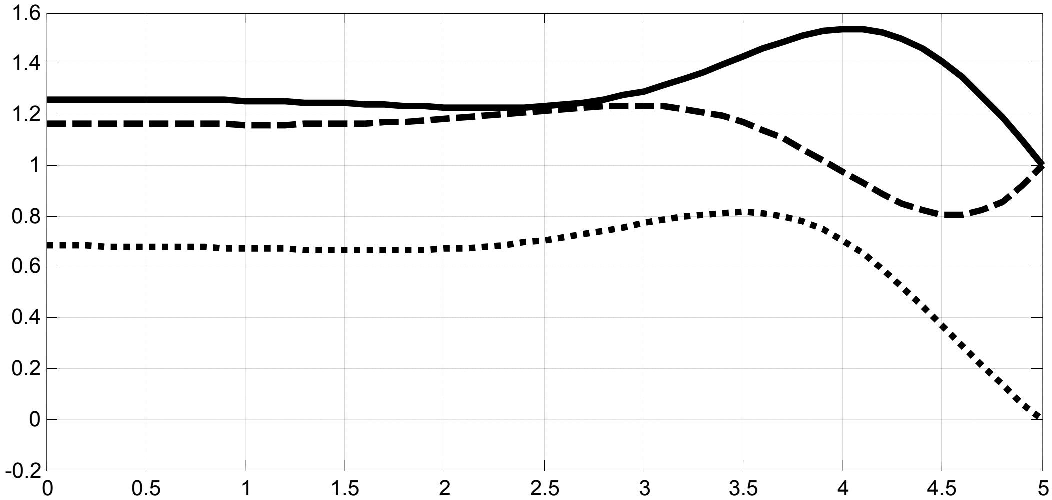

Рис. 2. Графік залежності p_{nij} (вертикальна вісь) від t при *n=2*, коли $a=1$, $l=1$, $t_0=0$, $t_1=5$ ($p_{n11}(t)$ **- суцільна крива;** $p_{n12}(t)=p_{n21}(t)$ **- дрібна пунктирна крива;** $p_{n22}(t)$ **- пунктирна крива)**

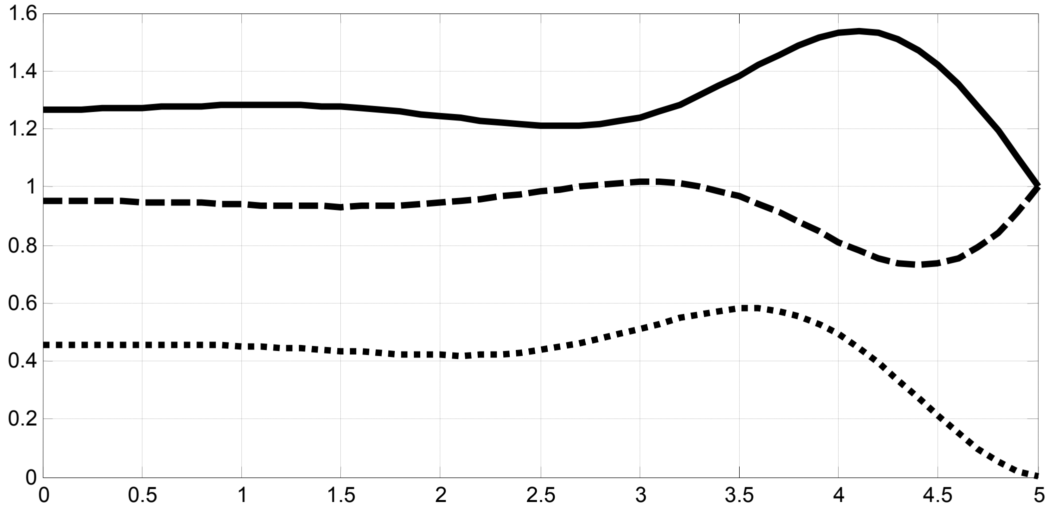

Рис. 3. Графік залежності p_{nij} (вертикальна вісь) від t при *n*=3, коли $a=1$, $l=1$, $t_0=0$, $t_1=5$ ($p_{n11}(t)$ **- суцільна крива;** $p_{n12}(t)=p_{n21}(t)$ **- дрібна пунктирна крива;** $p_{n22}(t)$ **- пунктирна крива)**

Висновки

Таким чином, в статі приведено дослідження лінійно-квадратичної задачї оптимального керування процесом коливання струни. Для цієї задачі, використовуючи метод множників Лагранжа, отримані необхідні умови оптимальності. Із цих умов виведена система інтегро-диференціальних рівнянь Ріккаті. Розв'язок отриманої системи представлено в замкненій формі. Розглянуто ілюстративний приклад.

Аннотация*: В статье исследуется линейно-квадратичная задача оптимального управления процессом колебаний струны. Актуальность этой задачи не вызывает сомнений. В противоположность наиболее распространенным методам исследования этой задачи (принцип максимума Понтрягина, метод динамического программирования Беллмана), в статье использован метод множителей Лагранжа. В результате получены необходимые условия оптимальности. Установлены условия, обеспечивающие единственность оптимального управления. Получена система интегро-дифференциальных уравнений Риккати и дополнительные условия для нее. Решение этой системы дает возможность представить оптимальное управление в явной форме. Рассмотрены конкретный пример и графическую иллюстрацию основных результатов. В дальнейшем перспективным является исследование систем полученых функций (14) и (16). Также представляет интерес анализ аналогичной математической модели со стохастическими параметрами.*
Ключевые слова: квадратичный функционал; колебания струны; метод динамического программирования Р. Беллмана; метод множителей Лагранжа; оптимальное управление; принцип максимума Понтрягина; система интеро-дифференциальных уравнений Риккати.

***Abstract.** The article investigates the linear-quadratic problem of optimal control for the process of the vibrating string. The urgency of this problem is not in doubt. In contrast, the most common methods of investigation of this problem (the Pontryagin maximum principle, dynamic programming Bellman method), in the article the method of Lagrange is implemented. As a result, necessary optimality conditions received. The conditions identified to ensure the uniqueness of the optimal control. A system of integral-differential Riccati equations and additional conditions for it obtained. The solution of this system gives the opportunity to provide optimal control as explicit form. The concrete examples and graphic illustration of the main results observed. In the future, it is promising to study the resulting functions of systems (14) and (16). Also the analysis of a similar mathematical model with stochastic parameters represents an interest for investigation.*
Keywords: quadratic functional; string vibrations; Bellman method of dynamic programming; Lagrange multipliers method; optimal control; maximum principle of Pontryagin; system of integro-differential Riccati equations.

References

1. Panovko, Ja.G. (1957), *Osnovy prikladnoj teorii uprugih kolebanij* [Foundations of the applied theory of vibrations], Mashinostroenie, Moscow, Russian.
2. Strutt, J.W. (1940), (baron Raleigh), *Teorija zvuka* [Theory of sound], Vol. 1, Gostechizdat, Moscow, Russian.
3. Timoshenko, S.P. (1985), *Kolebanija v inzhenernom dele* [Vibrations problems in engineering], Mashinostroenie, Moscow, Russian.
4. Znamenskaj, L.N. (2004), *Upravlenie uprugimi kolebanijami* [Control by elastic vibrations], FIZMATLIT, Moscow, Russian.
5. Komkov, V. (1975), *Teorija optimal'nogo upravlenija dempfirovaniem kolebanij prostyh uprugih sistem* [Optimal control theory for the damping of vibrations of simple elastic systems], Mir, Moscow, Russian.
6. Kopets, M.M. (2015), "Optimal control by the process of vibrations of thin rectangular shank", *Problems of control and informatics*, no 3, pp. 42-55.
7. Chernous'ko, F.L. (1992), "Bounded controls in distributed-parameter systems parameters", (Russian edition), *Applied mathematics and mechanics*, 56, no 5, c. 810-826.
8. Naidu, D.S., Optimal control systems, (Electrical engineering textbook series), CRC PRESS Boka Raton London, New York.

Подана до редакції 04.04.2016