

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ РАДІАЛЬНОГО ТИСКУ ПЛАСТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА ПРИ ОСАДЦІ ПОЛИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Получено обобщенное уравнение равновесия для осесимметричной задачи в цилиндрических координатах, решение которого в аналитическом виде позволяет определить функцию касательных напряжений от координат очага деформации. Определены составляющие тензора напряжений для плоской осесимметричной задачи. Исследование напряженного состояния толстостенной трубы при торцевой осадке с учетом радиального внешнего и внутреннего подпора. Показано влияние радиального подпора на распределение нормальных и касательных напряжений.

The generalized equalization of equilibrium is got for an axis of symmetry task in cylindrical co-ordinates, the decision of which in an analytical kind allows to define the function of tangent tensions from the co-ordinates of hearth of deformation. The constituents of tensor of tensions are certain for a flat axis of symmetry task. Research of the tense state of the thick-walled pipe at the butt end sinking taking into account radial external and internal head. Influence of radial head is shown on distributing of normal and tangent tensions.

Вступ. Осадка полих тіл обертання в осьовому напрямі використовується для отримання виробів різного призначення: бандажів, кілець. Осадка в контейнерах використовується для отримання точних розмірів зовнішнього й внутрішнього діаметрів. В порошковій металургії, в умовах неоднорідного всебічного стискання, отримують циліндричні вироби в умовах зовнішнього й внутрішнього підпору. Рішення цієї задачі має теоретичне та практичне значення.

Розроблена математична модель напруженого стану, враховуюча контактне тертя, фактор форми, зовнішній й внутрішній підпори, їх сумісні дії.

Постановка задачі. Постановка задачі припускає визначення системи рівнянь теорії пластичності, тобто рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho} - \sigma_{\varphi}}{\rho} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} = 0, \quad (1)$$

умова пластичності:

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2, \quad (2)$$

рівняння зв'язку:

$$\frac{\sigma_{\rho} - \sigma_z}{2\tau_{\rho z}} = \frac{\xi_{\rho} - \xi_z}{\gamma_{\rho z}}, \quad (3)$$

умова нестисливості:

$$\xi_{\rho} + \xi_z = 0, \quad (4)$$

рівняння нерозривності швидкостей деформацій:

$$\frac{\partial^2 \xi_{\rho}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{\rho z}}{\partial z \partial \rho}, \quad (5)$$

Граничні умови задаються в напругах, з урахуванням тригонометричного розподілу напруг на контакті, тобто

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\alpha), \quad (6)$$

де σ, τ - нормальне й дотичне напруження; τ_n - контактне дотичне напруження; α - кут нахилу площадки; k - опір пластичному зрушенню; Φ - функція координат ρ, z , що підлягає визначенню; A - постійна величина.

Вирази (3)...(5) не використовуються при рішенні задачі, але мають місце для обґрунтування схеми плоскої течії.

Рішення задачі. В роботі [1] представлено узагальнене рівняння рівноваги, де визначальною функцією є дотичне напруження $\tau_{\rho z}$.

$$\frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \tau_{\rho z}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\tau_{\rho z}}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\pm \frac{1}{\rho} \sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right) = \pm 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} \left(\sqrt{k^2 - \tau_{\rho z}^2} \right), \quad (7)$$

Аналітичне рішення останнього рівняння дозволяє знайти функціональну залежність дотичного напруження від координат осередку деформації. Для задоволення граничних умов (6) маємо:

$$\tau_{\rho z} = k \cdot \sin A\Phi, \quad (8)$$

де: $A\Phi$ - символічний запис добутку A - константи, що визначає механічні властивості середовища й Φ - невідомої функції від координат x та y , що підлягає визначенню.

Це дозволяє лінеаризувати рівняння. Далі, використовуємо фундаментальну підстановку у вигляді

$$k = H_{\sigma} \exp \theta, \quad (9)$$

де: H_{σ} - функція координат ρ, z , що підлягає визначенню; θ - показник експоненти, як функція, що залежить від тих же координат і підлягає визначенню. З (9) слідує, що опір пластичної деформації є величиною змінної. Підставляючи (8) і (9) у рівняння (7), після спрощень маємо

$$\begin{aligned} & \{ (H_{\sigma})_{\rho\rho} - (H_{\sigma})_{zz} + 2(H_{\sigma})_{\rho}(\theta_{\rho} + A\Phi_z) + (H_{\sigma})_{\rho} \frac{1}{\rho} - 2(H_{\sigma})_z(\theta_z - A\Phi_{\rho}) + \\ & + H \left[(\theta_{\rho\rho} - \theta_{zz}) + (\theta_{\rho} + A\Phi_z)^2 - (\theta_z - A\Phi_{\rho})^2 + \frac{1}{\rho}(\theta_{\rho} + A\Phi_z) + 2A\Phi_{\rho z} - \frac{1}{\rho^2} \right] \} \cdot \\ & \cdot \sin A\Phi + \{ 2(H_{\sigma})_{\rho}(A\Phi_{\rho} - \theta_z) - 2(H_{\sigma})_z(A\Phi_z - \theta_{\rho}) - (H_{\sigma})_z \frac{1}{\rho} + H_{\sigma} [2(A\Phi_{\rho} - \theta_z) \cdot \\ & \cdot \left(\theta_{\rho} + A\Phi_z + \frac{1}{2\rho} \right) + A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz} - 2\theta_{\rho z}] - 2(H_{\sigma})_{\rho z} \} \cdot \cos A\Phi = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

Оператори при тригонометричних функціях у рівнянні (10) значно спростяться за умови

$$\theta_{\rho} + A\Phi_z = 0; \quad \theta_z - A\Phi_{\rho} = 0,$$

або

$$\theta_{\rho} = -A\Phi_z; \quad \theta_z = A\Phi_{\rho}, \quad (11)$$

Після спрощень рівняння (10), маємо змогу знайти функцію H_{σ} у вигляді:

$$H_{\sigma} = \frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \quad (12)$$

З урахуванням співвідношень Коші-Рімана (11) можна показати, що функції θ і $A\Phi$ є гармонійними й задовольняють рівнянням Лапласа

$$\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0; \quad A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0.$$

Отже, невідомі функції є заданими, тому що відомі диференціальні рівняння, які їх визначають.

Дотичне напруження, що задовольняє диференціальному рівнянню (7) має вигляд

$$\tau_{\rho z} = \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \cdot \exp \theta \sin A\Phi \quad (13)$$

при виконанні умови $\theta_{\rho} = -A\Phi_z; \quad \theta_z = A\Phi_{\rho}$.

Підставляючи (13) у рівняння рівноваги (1), інтегруючи з урахуванням співвідношень (11) одержимо

$$\sigma_{\rho} = \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \cdot I_1 + \sigma_0 + f(z) + C \quad (14)$$

$$\sigma_z = - \left(\frac{C_2}{\rho} + C_1\rho \right) \exp \theta \cdot \cos A\Phi - 2C_1 \cdot I_2 + \sigma_0 + f(\rho) + C \quad (15)$$

Інтеграли $I_1 = \int \exp \theta \cdot \cos A\Phi d\rho$, $I_2 = \int \exp \theta \cdot \sin A\Phi dz$. Можна показати, що $I_1 = I_2$. Рівність інтегралів визначається особливостями гармонійних функцій. В виразах (14), (15) маємо постійні C_1, C_2 . З граничних умов.

Аналіз отриманих результатів.

Для визначення постійних інтегрування запишемо граничні умови, рис. 1.

1. При $\rho = r$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta_0$, $A\Phi = A\Phi_0$, $\sigma_{\rho} - \sigma_z = 2k_0 + \sigma_0 = 2k_0\xi_0$;

$$\xi_0 = 1 + \frac{\sigma_0}{2k_0}.$$

2. При $\rho = R$, $z = \frac{h}{2}$, $\theta = \theta_1$, $A\Phi = A\Phi_1$,
 $\sigma_z - \sigma_\rho = 2k_1 + \sigma_1 = 2k_1\xi_1$;

$$\xi_1 = 1 + \frac{\sigma_1}{2k_1}.$$

При підстановці граничних умов маємо систему рівнянь:

$$2k_0\xi_0 = 2\left(C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r}\right) \cdot \exp\theta_0 \cdot \cos A\Phi_0;$$

$$2k_1\xi_1 = 2\left(C_1 \cdot R + \frac{C_2}{R}\right) \cdot \exp\theta_1 \cdot \cos A\Phi_1.$$

де ξ_1, ξ_2 - значення які визначають величину підпору на зовнішньому й внутрішньому діаметрі

Необхідно визначити C_1, C_2

$$C_1 = \frac{1}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} - r \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} \right];$$

$$C_2 = \frac{R \cdot r}{R^2 - r^2} \left[R \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp(\theta_0) \cdot \cos A\Phi_0} - r \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp(\theta_1) \cdot \cos A\Phi_1} \right]$$

Таким чином $\sigma_\rho, \sigma_z, \tau_{\rho z}$ приймають вигляд:

$$\sigma_\rho = - \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0 \quad (16)$$

$$\sigma_z = -3 \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_0) \right] \cdot \cos A\Phi + k_0 \quad (17)$$

$$\tau_{\rho z} = \left[\frac{R \cdot k_1 \cdot \xi_1 \cdot \left(\rho - \frac{r^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_1} \cdot \exp(\theta - \theta_1) - \frac{r \cdot k_0 \cdot \xi_0 \cdot \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)}{(R^2 - r^2) \cdot \cos A\Phi_0} \cdot \exp(\theta - \theta_1) \right] \cdot \sin A\Phi \quad (18)$$

Вирішуючи рівняння Лапласа, з урахуванням граничних та очевидних умов в зоні пластичного деформування отримаємо функції θ та $A\Phi$ які зв'язані співвідношенням Коші-Рімана у вигляді:

$$A\Phi = AA_1 z + AA_6 \cdot \rho \cdot z = -AA_6 \cdot z \cdot (\rho - r_n)$$

$$\theta = AA_6 \cdot \frac{\rho^2}{2} - AA_6 \cdot r_n \cdot \rho - AA_6 \cdot \frac{z^2}{2}$$

де AA_6 – постійна величина, котра задається умовами тертя на контакті;

r_n – радіус, який визначає положення нейтрального перерізу.

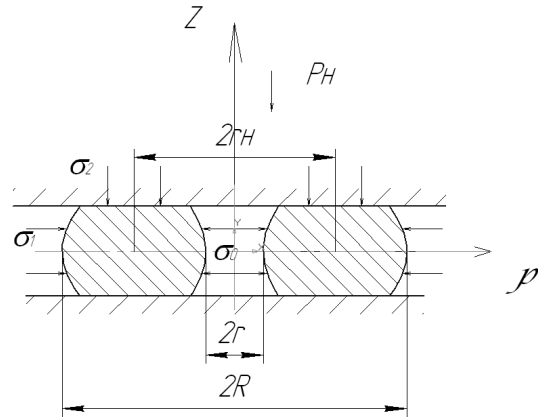


Рис. 1. Схема осаджування товстостінної труби

З метою аналізу виразів (16) та (17) й виразу для визначення дотичного напруження (18), були проведені розрахунки напруження на контакті. Побудовані графіки розподілу напружень на контакті, рис. 2-5. З них бачимо, що коефіцієнт підпору істотно впливає на напружений стан товстостінної труби при осадці. Зі збільшенням коефіцієнта підпору зростає величина напруження й характер розподілу по довжині осередку деформації.

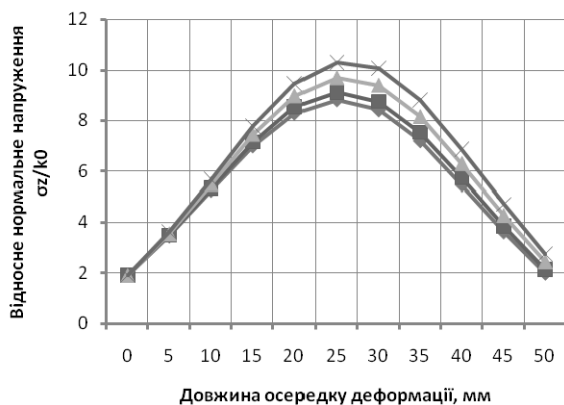


Рис. 2. Розподіл відносного нормального напруження при факторі форми $S/h=5$; коефіцієнті тертя $f=0,5$; $\xi = 1 \dots 1,25$; $\xi_0 = 1$



Рис. 3. Розподіл відносного дотичного напруження при факторі форми $S/h=5$; коефіцієнті тертя $f=0,5$; $\xi = 1 \dots 1,25$; $\xi_0 = 1$

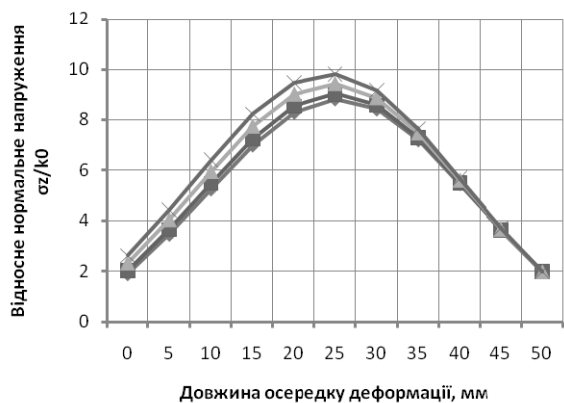


Рис. 4. Розподіл відносного нормального напруження при факторі форми $S/h=5$; коефіцієнті тертя $f=0,5$; $\xi_1 = 1$; $\xi_0 = 1 \dots 1,25$



Рис. 5. Розподіл відносного дотичного напруження при факторі форми $S/h=5$; коефіцієнті тертя $f=0,5$; $\xi_1 = 1$; $\xi_0 = 1 \dots 1,25$

Висновки.

1. На базі методу гармонійних функцій, запропоноване рішення плоскої осесиметричної задачі, при осадці товстостінної пологої заготовки, з урахуванням зовнішнього та внутрішнього радіального підпору.
2. Рішення показали, що радіальний підпор впливає на нормальні та дотичні напруження на контакті поверхні.
3. Розроблена математична модель при осадці товстостінної труби, дозволяє розраховувати поля напружень з врахуванням реального зовнішнього й внутрішнього підпору.

Список літератури

1. Чигиринський В.В. Рішення осесиметричної плоскої задачі теорії пластичності в напруженнях/ В.В. Чигиринський, С.А. Силенко, А.Ю. Матюхін// Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні.-2010. -№1
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением.-М.: Машиностроение, 1977.- 422 с.
3. Соколовский В.В. Теория пластичности.-М.: Высшая школа, 1962.-608 с.
4. Громов Н.П. Теория обработки металлов давлением.-М.: Металлургия, 1978.- 359 с.
5. Смирнов В.С. Теория прокатки.- М.:Металлургия, 1967.- 460 с.
6. Гарновский И.Я., Поздеев А.А. Течение металла при осадке толстостенных цилиндров// Сб.трудов Уральского политехн. ин-та.- 1958.-№64.- С.104-112.
7. Гарновский И.Я., Поздеев А.А., Ганаго О.А. Теория обработки металлов давлением.-М.: Металлургиздат,1963.-1963.- 673 с.