УДК 621.036:519

Яхно[1] О.М., д.т.н., проф.; Мачуга[2] О.С., к.ф. - м.н., доц.
1 - КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна; 2 – Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна

ЕКСЕРГІЙНИЙ АНАЛІЗ ТА МЕТОД ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ГІДРОМЕХАНІКИ

Yahno[1] O., Machuga[2] O.
1 – National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine;
2 – National Forestry University of Ukraine, Lviv, Ukraine

EXERGIC ANALYSIS AND VARIATIONAL INEQUALITIES METHODS IN SOME FLUID MECHANIC'S PROBLEMS

Енергетичний ресурс довільного тіла характеризується сумою ексергії та анергії. Перша складова вказує, яку частину енергії можна використати для виконання механічної роботи. Друга є мірою незворотності у взаємодії такого тіла з іншими, вказує, яка частина енергії розсіюється у вигляді низькотемпературного тепла в оточуюче середовище й не може бути використана для виконання роботи.
Баланс енергії для термодинамічних систем є підставою для формулювання відповідних варіаційних принципів. Запровадження понять ексергії та анергії призводить до формулювання варіаційних нерівностей, які трансформуються у рівність у практично нереалізовному випадку зворотного рівноважного процесу або у випадку граничного стану.
Варіаційні нерівності можуть бути використані для формування загальних відношень визначення параметрів квазістатичного потоку реальної рідини у взаємодії його із твердими тілами – змоченим периметром трубопроводу чи відкритого русла, а також із включеннями - для випадків, коли поверхня взаємодії може бути наперед невідома. Згадані задачі виникають зокрема під час аналізу процесу розмивання та викликаного ним руйнування берегової лінії, взаємодії річкового потоку із каменями під час повеней та паводків у природних водотоках.
Ключові слова: енергія; ексергія; варіаційні нерівності; гранична рівновага; розмивання русла.

Вступ. Актуальність проблеми.

Формування підходів до аналізу поведінки механічних систем відбувалося двома різними шляхами. Один із них пов'язаний із законами Ньютона, справедливими для будь-якої системи матеріальних точок чи тіл довільної реології. Статичні та (або) динамічні характеристики стану визначаються у кожній точці системи із врахуванням особливості силової взаємодії між такими точками. Загальноприйнятими характеристиками є поля переміщень, напружень, деформацій та швидкостей деформації. Із розподілу вказаних величин визначаються їх локальні значення в розглядуваних особливих зонах, а затим прогнозується подальша поведінка досліджуваних середовищ, тіл, елементів конструкцій тощо.

Поряд із цим, запровадження Лейбніцом понять «жива сила» та «робота сили», дало поштовх до розвитку іншого шляху аналізування поведінки матеріальних тіл під час їх силової взаємодії. Дві величини – кінетична та потенційна енергії, в поєднанні з принципом віртуальних переміщень, стали підвалиною аналітичної механіки Лагранжа [1], сутність якої виражає наступний постулат – принцип: із усіх кінематично можливих рухів (чи станів) природа вибирає власне той, для якого певна комбінація кінетичної та потенційної енергії (або інакше - функція дії) є найменшою. Такий підхід став підґрунтям варіаційних принципів механіки, які мають значну кількість модифікацій [2], застосовується в різних задачах математичної фізики, зокрема теоретичної фізики [3], гідромеханіки [4], теорії пружності [5 - 10], механіки реологічних тіл [11] тощо. Цінність підходу полягає у тому, що для визначення особливостей поведінки розглядуваних механічних систем потрібно визначати розподіл лише двох скалярних величин – кінетичної та потенційної енергії, як функцій від параметрів – характеристик розглядуваних особливостей. Інформація про всі інші статичні та динамічні характеристики закладена у цих скалярах й визначається тільки у разі необхідності.

Існує суттєве обмеження у застосуванні енергетичного підходу у дослідженні реальних тіл. Варіаційні принципи зазвичай формулюються для ідеальних середовищ з характерними для них рівноважними та зворотними процесами, дисипація енергії у яких обмежена або відсутня взагалі. Це зумовлюється насамперед класичним формулюванням принципу віртуальних переміщень, згідно якого елементарна робота зовнішніх сил на кінематично можливих віртуальних переміщеннях системи матеріальних точок чи макроскопічних тіл рівна нулю. Однак у реальних реологічних тілах з вираженими дисипативними властивостями, частина елементарної роботи витрачається на трансформацію у інші види енергії, зокрема теплову та поверхневу, енергію фазових переходів. Тому елементарна робота зовнішніх сил на віртуальних переміщеннях стає більшою за нуль. У

DOI: http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.78.73382

випадку скінченних переміщень, виконувана зовнішніми силами робота надає розглядуваній системі матеріальних точок чи тіл певну скінченну кількість енергії, дисипативна частина якої накопичується цією системою, але не може стати причиною подальших енергетичних перетворень. Для тіл із дисипацією запропоновано енергетичний принцип [11], який пов'язується із розглядом внутрішніх джерел тепла. Однак для усестороннього аналізу механічних систем, у яких енергетичні взаємоперетворення є істотними, слід розглядати варіаційну постановку задач із формулюванням відповідних термодинамічних потенціалів, що враховують дисипативну компоненту процесу.

В даній роботі для формулювання постановки такого класу задач пропонується застосувати методи варіаційних нерівностей [12,13], які успішно використовуються, зокрема, для задач із невідомою границею контакту кусково – однорідних багатофазних структур, що допускає можливість аналізу взаємодії рідин і твердих тіл. Така постановка застосовується тут у випадку квазістатичних задач для усталених рухів тіл, динамічними чинниками у яких знехтувано. Вказане обмеження дозволяє розглядати систему матеріальних тіл в рівноважному процесі. Поряд із цим, врахування дисипативних властивостей уможливлює розгляд процесів переміщення та деформування таких систем від одної конфігурації до іншої, як незворотних.

Структурування енергії системи матеріальних точок або тіл як суми ексергії та анергії [14] дає розуміння наступного. Ексергія є та частина енергії тіла, яка може бути повністю передана ним іншому тілу (чи матеріальній точці) шляхом виконання механічної роботи. В ідеалізованому випадку відсутності дисипації ексергія є частиною енергії, яка забезпечує зворотність процесу передачі енергії. Анергія є доповнюючою частиною енергії тіла, яка за жодних умов не може передаватись у вигляді роботи, а лише у вигляді низькотемпературного тепла. Анергія є «енергетичним фоном»: енергія оточуючого середовища складається тільки з анергії.

Реальні процеси руху системи тіл або матеріальних точок завжди спонукаються процесами перетворення енергії тіл так, що частина ексергії виконує корисну роботу а інша її частина витрачається на дисипацію, тобто в кінцевому результаті - на збільшення внутрішньої енергії або поверхневої енергії внаслідок дисипативних, мікро- та макродеструктивних процесів під час втрати суцільності тілами системи. Виходячи із цього другий закон термодинаміки можна сформулювати наступним чином: ***«в усіх механічних процесах анергія зростає»*** [15]. Разом із законом збереження енергії це дає можливість збудувати відповідний клас варіаційних нерівностей, який пропонується в даній роботі для постановки і розв'язування задач взаємодії кусково – однорідних реологічних середовищ та систем матеріальних тіл.

Постановка задачі.

Розглянемо рівноважний стан тривимірного тіла Ω з границею Σ. Тіло Ω може бути структурованим, складатись із окремих частин $\Omega_i, i=\overline{1,N}$, реологічні властивості кожного із яких тут не обмежуються. У ідеалізованому випадку $\Omega_i, i=\overline{1,N}$ є лінійно-пружними твердими тілами або нев'язкими рідинами; контакт між ними є ідеальним, змішування окремих рідин не розглядаємо. Стан тіла Ω описується варіаційним рівнянням [1]:

$$\delta\Pi = 0, \tag{1}$$

де Π - потенційна енергія тіла Ω. Рівняння (1) є визначальним для обчислення компонентів тензорів напружень, деформацій і швидкостей деформацій та векторів переміщень у кожній із точок тіла Ω.

Як відомо, потенційна енергія Π визначається із точністю до деякої сталої U_0 - внутрішньої енергії тіла, яка детермінується термомеханічними характеристиками зовнішнього стосовно Ω середовища. Величина повної механічної енергії тіла U вводиться наступним чином:

$$U = U_0 + \Pi \tag{2}$$

Із рівнянь (1) та (2), враховуючи, що U_0 є сталою для ідеальних тіл, слідує:

$$\delta U = 0. \tag{3}$$

Використовуючи структурування енергії U як суму ексергії Ex та анергії An [15], з (3) отримуємо:

$$\delta\left(Ex + An\right) = 0 \tag{4}$$

Пропонується використовувати рівняння (4) для аналізу поведінки тіла Ω у незворотних енергетичних процесах. Незворотність полягає в тому, що будь – яке, в тому числі й віртуальне, відхилення тіла Ω від положення енергетичної рівноваги супроводжується дисипативним перетворенням частини механічної енергії в теплову внаслідок протікання в'язкісних та пружно-пластичних процесів в об'ємі тіла. Крім того, під час будь-яких переміщень, в об'ємі тіла Ω виникають мікродеструкції, формуються нещільності на контактних поверхнях окремих складових $\Sigma_{ij}, i, j=\overline{1,N}$. Такі процеси поглинають певну частину механічної енергії, яка витрачається на розривання відповідних міжмолекулярних зв'язків.

Типізовані вище енергетичні перетворення під час довільних, в тому числі віртуальних, відхилень тіла Ω від положення рівноваги, викликають збільшення анергії у відношенні до її початкової кількості. У віртуальних процесах

$$\delta An \geq 0 . \quad (5)$$

В силу закону збереження енергії, ексергія в такому віртуальному процесі зменшується:

$$\delta Ex \leq 0 . \quad (6)$$

Об'єднуючи (5) та (6) можемо отримати узагальнену варіаційну нерівність для тіла Ω в цілому:

$$\delta\left(Ex - An\right) \leq 0 , \quad (7)$$

та для випадку врахування структури такого тіла:

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\left(Ex_i - An_i\right)\right) \leq 0 , \quad (8)$$

де Ex_i, An_i - відповідно ексергія та анергія кожного із складників Ω_i тіла Ω.

Відношення (7) та (8) можуть бути визначальними у дослідженні механічних процесів і станів реологічних тіл з істотними дисипативними властивостями. Математичні вирази ексергії та анергії слід формулювати у кожному конкретному випадку конфігурації, реологічних властивостей та виду навантаження розглядуваних об'єктів.

Запропонований підхід легко може бути узагальнено на випадок нерівноважних процесів шляхом використання принципу Д'аламбера – Лагранжа або варіаційного принципу Гамільтона. Крім того зазначимо, що рівняння (7), (8) можливо використовувати для дослідження процесів теплообміну із врахуванням термомеханічних ефектів, трансформуючи відповідним чином базові варіаційні принципи термомеханіки, слідуючи зокрема [7].

Тестові задачі.

1. Розглянемо тріщину довжиною $2l$ в необмеженій плоскій пластині одиничної товщини (задача Гріффітса [16]). Внаслідок розтягування пластини зусиллями p, прикладеними перпендикулярно до тріщини на значній відстані від неї, відбувається накопичення потенційної енергії деформації Π, знак якої визначається видом деформування (розтяг):

$$\Pi = -\left(\Pi_0 - \frac{\pi \cdot l^2 p^2 \left(1-\nu^2\right)}{E}\right), \quad (9)$$

де E, ν - відповідно модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини, Π_0 - потенційна енергія деформування пластини без тріщини.

Енергетичний стан пластини характеризується ще й поверхневою енергією Γ, запровадженою Гріффітсом:

$$\Gamma = 4\gamma l , \quad (10)$$

де γ - питома поверхнева енергія, визначена для кожної із обох поверхонь, що формують тріщину.

Для розглядуваної задачі ексергія співпадає з потенційною енергією пружної деформації, анергія – з поверхневою енергією:

$$Ex = \Pi, \quad An = \Gamma . \quad (11)$$

Вважатимемо, що півдовжина тріщини l є функцією зовнішнього навантаження p: $l = l\left(p\right)$, тому задача полягає у будуванні розв'язку для тіла з наперед невідомою границею. Виконуючи операцію варіювання для виразів енергій (9) та (10) стосовно функції $l = l\left(p\right)$, отримаємо:

$$\delta\Pi = \frac{2\pi \cdot l\,\delta l\, p^2\left(1-\nu^2\right)}{E}, \quad \delta\Gamma = 4\gamma\delta l , \quad (12)$$

Використовуючи (7) та (11) будуємо варіаційну нерівність:

$$\left(\frac{2\pi \cdot l\, p^2\left(1-\nu^2\right)}{E} - 4\gamma\right)\delta l \leq 0 . \quad (13)$$

Оскільки варіація довжини тріщини δl є величиною довільною та невід'ємною, тому вираз в дужках відношення (13) є від'ємним або рівним нулю. Звідси отримуємо відношення для визначення рівноважної довжини тріщини у випадку заданого розтягуючого зусилля p:

$$l \le \frac{2\gamma E}{\left(1-\nu^2\right)p^2}. \tag{14}$$

Знак рівності у (14) реалізується у випадку критичної рівноваги пластини з тріщиною. Тріщина, довжина якої задовольняє умові (14), є стабільною; чим більші розриваючі зусилля, тим менша допустима довжина тріщини. Наявність в пластині тріщини, довжина якої не задовольняє умову (14), неможлива: це призвело б до повного розірвання пластини.

Відношення (14) можливо використати для визначення рівноважних, «докритичних» для даної довжини тріщини розтягуючих зусиль:

$$p \le \sqrt{\frac{2\gamma E}{\left(1-\nu^2\right)\cdot l}}. \tag{15}$$

Знак рівності у (15) досягається у граничному випадку рівноваги тіла з тріщиною; перевищення зовнішніми зусиллями величини, визначеної (15), призведе до руйнівного збільшення тріщини.

Отримані за допомогою варіаційної нерівності (7) результати (14), (15) співпадають із відомими результатами [16].

2. Розглянемо задачу гальмування і зупинки тріщини композитною вставкою – гасником. Необмежена плоска пластина одиничної товщини із тріщиною довжиною $2l$ розтягується поперечними до напрямку тріщини зовнішніми зусиллями p. На продовженні осі тріщини розташовано шарувату композитну вставку – гасник. Напружений стан такого тіла характеризується потенційною енергією деформації (9) та поверхневою енергією (10). В багатошарових композитних структурах внаслідок їх розшарування формуються зони розтріскування – розшарування, де частина пружної енергії витрачається на подолання тангенційних зусиль міжфазного зчеплення. Для n - шарової вставки вираз розсіювання енергії [17], в припущенні що власне таке розсіювання відбувається в зоні тріщини, має наступний вигляд:

$$E\tau = \frac{4}{3}n\cdot\left(n-1\right)\frac{\tau_S^2\, l^3}{E}\left(1-\nu^2\right) \tag{16}$$

де τ_S - дотичні напруження міжфазної взаємодії типу пластичного проковзування. У розглядуваному випадку Ex виражається відношенням (9); для анергії із врахуванням розсіювання енергії вставкою - гасником (16) запишемо:

$$An = 4\gamma\, l + \frac{4}{3}n\cdot\left(n-1\right)\frac{\tau_S^2\cdot l^3}{E}\left(1-\nu^2\right). \tag{17}$$

Використовуючи у варіаційній нерівності (7) вирази (9) та (17), виконуючи операцію варіювання для функції $l = l\left(p\right)$, та міркуючи так як і у попередньому прикладі, можна отримати нерівність для визначення стабільного розміру тріщини у вставці – гаснику для заданого навантаження p:

$$-4n\left(n-1\right)l^2\tau_s^2\,\frac{1-\nu^2}{E} + 2\pi l\, p^2\,\frac{1-\nu^2}{E} - 4\gamma \le 0\,. \tag{18}$$

Вид квадратного тричлена стосовно l у відношенні (18) вказує на те, що стабільний для заданого навантаження розмір тріщини не перевищує певної величини, аналогічно до попереднього приклада. Однак у випадку перевищення довжиною тріщини певної величини, тріщина «гальмується» внаслідок стрімкого (квадратичного) збільшення дисипативних чинників. Як і в попередньому прикладі, із (18) можна отримати вираз граничного навантаження, що викликає раптове руйнування пластини.

Зазначимо, що у вище наведених прикладах використовуються наперед відомі вирази потенційної енергії пружного деформування з метою спрощення викладок та ілюстрування способу визначення зовнішньої границі тіла, тобто розміру тріщини. Пропонований підхід легко алгоритмізується на загальний випадок, коли необхідно визначати напружено-деформований стан структури.

Потік рідини у руслі, що може розмиватись.

Розглянемо потік реальної рідини в руслі, яке може розмиватись внаслідок контактної взаємодії з рухомою рідиною. За використання струминної моделі потоку рідини, інтеграл Бернуллі (див. зокрема [18]) визначає енергетичні фактори: питому енергію потоку рідини e_{MEX} :

$$e_{MEX} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}, \tag{19}$$

та зменшення енергії через втрату напору e_{BT} :

$$e_{BT} = \Delta h, \tag{20}$$

де z координата осі потоку відносно площини порівняння, p, ρ - усереднені по розглядуваному живому перерізі значення тиску та густини рідини, v - середня швидкість потоку в даному перерізі, $g = 9,81 \quad м/c^2$ - пришвидшення вільного падіння. В розглядуваній тестовій задачі приймемо значення коефіцієнта Коріоліса $\alpha \approx 1,0$.

Нехай x - біжуча координата вздовж напрямку потоку рідини. В загальному випадку елементи, що формують відношення (19) та (20) є функціями змінної x . Розглянемо скінченний відсік потоку рідини довжиною l. Для виділеного фрагменту механічна енергія потоку E_{MEX} та енергетичні втрати E_{BT} :

$$E_{MEX} = \int_0^l \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot \rho g S dx, \quad E_{BT} = \int_0^l \Delta h \cdot \rho g S dx, \tag{21}$$

де S - площа живого перерізу потоку.

Рух виділеного фрагменту потоку рідини руслом, що може зазнавати розмивання, характеризується енергетичними втратами $E_{ЗМ}$, необхідними для змивання (знесення) об'єму $V_{ЗМ}$ матеріалу русла. Припустимо:

$$E_{ЗМ} = \chi \cdot V_{ЗМ}, \tag{22}$$

де χ - питома об'ємна енергія, необхідна на змивання одиниці об'єму матеріалу русла. Наслідуючи [19] приймемо нелінійну модель зносу в наступному вигляді:

$$V_{ЗМ} = k\tau v^n \tag{23}$$

де τ - усереднені по поверхні контакту потоку з руслом тангенційні напруження, k - коефіцієнт пропорційності, який визначається трибологічними властивостями матеріалу русла, n - ступінь нелінійності. Із відношень (22), (23) отримуємо:

$$E_{ЗМ} = \chi k \tau v^n = K \cdot v^n. \tag{24}$$

де K - модуль зносу.

В розглядуваному випадку:

$$Ex = E_{MEX}, \quad An = E_{BT} + E_{ЗМ} \tag{25}$$

Використовуючи у варіаційній нерівності (7) вирази (21), (24), (25), отримаємо:

$$\delta \int_0^l \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} - \Delta h \right) \cdot \rho g S dx - \delta \left(K \cdot v^n \right) \le 0. \tag{26}$$

Варіаційна нерівність (26) є базовою щодо визначення параметрів потоку рідини та швидкості розмивання русла. Для отримання інженерної оцінки швидкості розмивання русла виконаємо наступні операції. Вважатимемо, що протяжність виділеного фрагменту потоку рідини є невеликою, тому підінтегральний вираз не залежить від аргументу x; вважатимемо, що два перших доданки в підінтегральному виразі (26) не залежать від швидкості. Для втрати напору справедлива формула Дарсі: $\Delta h = \lambda \frac{v^2}{2g} \frac{l}{d}$, де λ - коефіцієнт гідравлічного тертя, d - приведений діаметр потоку. Швидкість руху потоку v є достатньо велика, так, що $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0$. Використовуючи такі спрощення в (26), виконуємо інтегрування та варіювання по швидкості й отримуємо:

$$\left(v \left(1 - \lambda \frac{l}{d} \right) m - K \right) \delta v \le 0. \tag{27}$$

Із відношення (27) слідує, що знаки варіації δv та виразу в дужках взаємно протилежні. У випадку розгону потоку рідини $(\delta v \ge 0)$ із (27), враховуючи (23) та (24), отримуємо:

$$V_{ЗМ} \ge m v^2 \frac{1 - \lambda \frac{l}{d}}{\chi}, \tag{28}$$

де m - маса відсіку потоку рідини, яка викликає змивання матеріалу русла об'ємом $V_{ЗМ}$. Із формули (28) випливають відношення, які можливо використовувати для розв'язування практичних задач:

$$V_{ЗМ} \geq V_B \cdot \rho \cdot v^2 \frac{1-\lambda \frac{l}{d}}{\chi}, \quad V_{ЗМ} \geq t \cdot \rho \cdot v^3 \cdot S \frac{1-\lambda \frac{l}{d}}{\chi} \tag{29}$$

де V_B - об'єм рідини, який розмиває об'єм матеріалу русла $V_{ЗМ}$, t - відповідний час. Зазначимо, що величина питомої об'ємної енергії χ залежить зокрема від реологічних властивостей матеріалу русла та потребує дослідного визначення у конкретних випадках. Підкреслимо, що обидві із формул (29) визначають об'єм змитого матеріалу пропорційним до об'єму протікаючої рідини, або часу протікання виділеного об'єму рідини. Водночас перша із формул (29) визначає квадратичну залежність об'єму змитого матеріалу русла від швидкості потоку, а друга – кубічну.

Зазначимо, що знак нерівностей (29) визначається для випадку кінематично можливого збільшення швидкості потоку рідини. У випадку гальмування потоку, знак нерівності змінюється на протилежний. Для граничного випадку фіксованої величини швидкості потоку, нерівність (26) перетворюється на рівність.

Нерівності (29), що визначають межі знесеного матеріалу можливо використовувати у практичних задачах.

Висновки.

Для постановки та розв'язку окремих класів задач гідромеханіки пропонується використовувати енергетичний підхід. У випадку виражених дисипативних властивостей розглядуваних матеріалів це призводить до формулювання задач у вигляді варіаційної нерівності. Співставлення отриманих таким чином розв'язків тестових задач, співпадають із відомими даними. Поряд з цим, пропонований підхід дозволяє розглядати широкий спектр задач рівноваги та усталених незворотних процесів в кусково-однорідних дисипативних середовищах, зокрема – під час інженерної оцінки працездатності гідромеханічних систем. Підхід можна використовувати у розв'язуванні задач для тіл із наперед невідомою границею [13] в найзагальнішому формулюванні. Варіаційна постановка передбачає можливість будування числових методів розв'язування таких класів задач.

Аннотация. *Энергетический ресурс произвольного тела характеризуется суммой эксергии и анергии. Первая из них указывает, какую часть энергии можно использовать для выполнения механической работы. Вторая - является мерой необратимости процессов при взаимодействии такого тела с другими, указывает, какая часть энергии рассеивается в виде низкотемпературного тепла в окружающую среду и не может быть использована для выполнения работы.*

Баланс энергии для термодинамических систем является основанием для формулирования соответствующих вариационных принципов. Использование понятий эксергии и анергии приводит к построению вариационных неравенств, которые трансформируются в равенство в практически недостижимом случае обратимого равновесного процесса или в случае предельного состояния.

Вариационные неравенства могут быть использованы для формирования общих уравнений для определения параметров квазистатического потока реальной жидкости во взаимодействии его с твердыми препятствиями - смоченным периметром трубопровода или открытого русла, а также с включениями - для случаев, когда поверхность взаимодействия заранее неизвестна. Упомянутые задачи возникают в частности при анализе процесса размывания и вызванного им разрушения береговой линии, взаимодействия речного потока с камнями во время наводнений и паводков в естественных водотоках.

Ключевые слова: энергия; эксергия; вариационные неравенства; предельное равновесие; размывания русла.

Abstract. *Purpose. The foundations of the energetic approach for analyzing of the bodies with dissipation properties are presented in the article.*

Methodology. Energy resource of arbitrary body is characterized by the sum of the exergy and anergy. The first of them indicates the part of energy which can be used to perform mechanical work. The second – is a measure of the processes' irreversibility in the interaction of such body with the others. It indicates what part of the energy dissipates into the environment as low-temperature heat and can't be used for the mechanical work performance.

The energy balance in the thermodynamic systems is the basis for the relevant variation principles formulation. The introduction of the exergy and anergy concept leads to the variation inequalities formulation. They are transformed into equality in almost non-realized case of the reverse ability and equilibrium process, or in the case of the limit equilibrium state.

Conclusion. Variation inequalities can be used for the formulation of general relations, which determine the parameters of quasi-static flow of real fluid in its interaction with solid obstacles - wetted perimeter of pipe or open channel, as well as the inclusions - in the cases of unknown interaction surface. These problems in particular arise in the analysis of the erosion process and shoreline destruction it caused, river flow interaction with stones during floods in natural streams.

Keywords: energy; exergy; variation inequalities; limiting equilibrium; shoreline erosion

References

1. LaGrange, J. (1950), *Analiticheskaja mehanika* [Analytical mechanics], Gosizdat, Moscow, Russia.
2. Polac, L.S. (ed.) (1959), *Variacionnyje principy mehaniki* [Variational principles of mechanics], Gosizdat, Moscow, Russia.
3. Rectoris, K. (1985), *Variacionnyje metody v matematicheskoj fizike i tehnike* [Variational methods in mathematical physics and engineering], Mir, Moscow, Russia.
4. Saltanov, N.V. (1984), *Analiticheskaja gidromehanika* [Analytical fluid mechanics], Nauk. dumka, Kijiv, Ukraine.
5. Lancosh, K. (1985), *Variacionnyje principy mehaniki* [Variational principles of mechanics], Mir, Moscow, Russia.
6. Sedov, L.I. (1981), *Izbrannyje voprosy sovremennoj mehaniki* [Selected topics of the modern mechanics], Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, Moscow, vol. 1 pp. 11 – 64.
7. Berdichevskij, V.L. (1983), *Variacionnyje principy mehaniki sploshnoj sredy* [Variational principles of continuum mechanics], Nauka, Moscow, Russia.
8. Abovskij, N.P., Andreejv, N.P., and Deruga A.P. (1978), *Variacionnyje principy teorii uprugosti i teorii obolochek* [Variational principles of the theory elasticity and the shells theory], Nauka, Moscow, Russia.
9. Mihlin, S.G. (1970), *Variacionnyje principy v matematicheskoj fizike* [Variational principles in mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.
10. Washizu, K. (1987), *Variacionnyje metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in elasticity and plasticity], Mir, Moscow, Russia.
11. Sedov, L.I. (1981), “Applied mathematics and mechanics”, vol. 45, no 6, pp. 963 – 984.
12. Duvo, G. and Lions, J. (1980L), *Neravenstva v mehanike i fizike* [Inequalities in mechanics and physics], Mir, Moscow, Russia.
13. Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G. (1983), *Vvedenie v variacionnye neravenstva i ih prilojenia* [An introduction to variational inequalities and their applications], Mir, Moscow, Russia.
14. Brodianskogo, V.M. (ed.) (1968), *Energia i eksergia* [Energy and exergy], Mir, Moscow, Russia.
15. Byer, G. (1968), *Energia i eksergia* [Energy and exergy], in. Brodianskogo, V.M. (ed.), Mir, Moscow, Russia.
16. Panasiuk, V.V. (1968), *Predel’noje ravnovesije hrupkih tel s treshchinami* [Limit equilibrium of brittle bodies with cracks], Nauk. Dumka, Kyiv, Ukraine.
17. Pelekh, B.L. (1982), Reports of the USSR Academy of Sciences. Series A. *Physics, mathematics and engineering sciences*, no 6, pp. 46 – 49.
18. Yahno, O.M., Matijega, V.M. and Odajskij, S.I. (2010), *Tehnichna gidrodynamika i osnovy teorii zmashchuvannia* [Technical fluid dynamics and basics of lubrication theory], “Zoloti lytavry”, Chernivci, Ukraine.
19. Kragel’skogo, I.V. and Alisina, V.V. (ed.) (1978), *Trenije, iznashyvanie i smazka* [Friction, wear and lubrication], Spravochnik, in. vol. 2, vol. 1, Mashinostoenie, Moscow, Russia.

Подана до редакції 07.08.2016