

## КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН

*Круглая кольцевая пластинка шарнирно опёрта по внутреннему и внешнему контуру. Составлены частотные уравнения и уравнения для определения положения узловых окружностей при (s=1...10) для симметричных и несимметричных изгибных колебаний. Проведены результаты вычислений частот и форм в случае, когда число узловых диаметров (n = 0, 1... 2), а число узловых окружностей (s=0, 1... 10).*

*The circular annular plate was hinge supported on the internal and outer contour. Frequency equations and equations for determining the position of node circles with (s = 1...10) for the symmetrical and asymmetrical flexural vibrations were formed. The results of the calculations of frequencies and forms in the event, when the number of node diameters (n = 0, 1... 2), and the number of node circles (s of = 0, 1... 10) were carried out.*

### Вступ.

Круглі пластинки зустрічаються в різного типу конструкціях в вигляді днищ, діафрагм, пружин. Рішення задачі по визначенню частот власних коливань для кільцевих пластин приведені в роботі [1]. Результати досліджень по визначенню частот приведені також в довіднику [2], де дана форма рішення і результати обчислення частотного параметра для симетричних і несиметричних форм коливань включно до третьої форми. Дані частотні параметри приведені в довіднику для інженерів-конструкторів [3] та в монографії [4]. Для шарнірно-закріплених кільцевих пластин даних по визначенню частот коливань в довідковій літературі [5] не зустрічається. Для шарнірно закріплених кільцевих пластин пластин форми також не визначались.

В роботі приведені частотні рівняння коливань шарнірно закріплених кільцевих пластин та знайдено частоти симетричних і несиметричних коливань при різних значеннях вузлових діаметрів (n = 0, 1... 2) та кругових кілець (s=0, 1... 10). В кожному випадку визначено положення вузлових діаметрів. Для коливань стиснутих та розтягнутих пластин визначені форми коливань.

### Мета досліджень.

Кільцева кругла пластинка закріплена шарнірно по зовнішньому та внутрішньому краю. Необхідно визначити частоти симетричних і несиметричних коливань з різним числом кругових кілець, та знайти положення вузлових діаметрів.

Основна частина

Рівняння коливань стиснутої круглої пластинки матиме такий вигляд [4]

$$D\nabla^4 w + \gamma h a^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$\text{де } \nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \cdot \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \theta^2} \right)^2$$

де, r- відстань від центра до точки пластинки,  $\theta$  - кутова координата точки,

w- нормальне переміщення, h- товщина пластинки, t- час,  $\gamma$  - густина діє в площині  $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$ -

циліндрична жорсткість при згині пластинки, E-модуль Юнга,  $\mu$ - коефіцієнт Пуассона, a-зовнішній радіус пластинки, b -внутрішній радіус пластинки,  $\rho = \frac{r}{a}$ ,  $\alpha = a/b$ .

Рішення рівняння (1) приймемо в такій формі [4]

$$w(\rho, \theta, t) = X_n(\rho) \cdot \cos n\theta \cdot \cos \omega t$$

де  $\omega$  - кругова частота коливань, n-число хвиль по периметру кола пластинки

Рівняння (1) прийме вигляд

$$\nabla^4 X_n(\rho) - \frac{m \cdot n^2 \cdot \omega^2 \cdot a^4}{D} \cdot X_n(\rho) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Нехай } k^4 = \frac{m \cdot n^2 \cdot a^4 \cdot \omega^2}{D}; \nabla^4 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \cdot \partial \rho} - \frac{n^2}{\rho^2} \right)^2$$

Рівняння (2) має рішення

$$X_n(\rho) = C_1 I_n(k\rho) + C_2 J_n(k\rho) + C_3 K_n(k\rho) + C_4 Y_n(k\rho) \quad (3)$$

де,  $-C_i$  сталі інтегрування,  $I_n(k\rho)$ ,  $Y_n(k\rho)$ ,  $J_n(k\rho)$ ,  $K_n(k\rho)$  - циліндричні функції Бесселя дійсного і чисто уявного аргумента першого і другого роду, порядок яких визначається індексом  $n$ .

Граничні умови:

$$X_n(k\alpha) = 0$$

$$(X_n''(k\rho) + \mu(X_n'(k\rho) + \frac{n^2 X_n(k\rho)}{\rho^2}))_{\rho=\alpha} = 0 \tag{4}$$

$$X_n(k) = 0$$

$$(X_n''(k\rho) + \mu(X_n'(k\rho) + \frac{n^2 X_n(k\rho)}{\rho^2}))_{\rho=1} = 0$$

Нехай  $L = [\frac{d^2}{d\rho^2} + \mu(\frac{d}{d\rho} + \frac{n^2}{\rho^2})]$

Прирівнюємо до нуля цей визначник і знаходимо частотне рівняння

$$\begin{bmatrix} I_n(k\alpha) & J_n(k\alpha) & K_n(k\alpha) & Y_n(k\alpha) \\ L[I_n(k\alpha)] & L[J_n(k\alpha)] & L[K_n(k\alpha)] & L[Y_n(k\alpha)] \\ I_n(k) & J_n(k) & K_n(k) & Y_n(k) \\ L[I_n(k)] & L[J_n(k)] & L[K_n(k)] & L[Y_n(k)] \end{bmatrix} = 0$$

Корні даного рівняння  $k_i$  приведені в таблицях (1-17) при різних значеннях параметра  $\alpha = a/b$ , що характеризує геометричну характеристику пластинки. В таблицях (1-17) приведені і також радіуси вузлових кілець  $\rho_i$  при різних значеннях параметрів  $\alpha$  і  $n$ . Радіуси знаходяться із рівняння (3), яке прирівнюється до нуля. Сталі  $C_i (i=2,3,4)$  виражаються через  $C_1$  із системи (4).

Таблиця 1 ( $\xi=0.1, n=2$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	5.051	8.28	11.07	13.32	15.95	19.023	22.24	28.79	32.11	35.45	38.83
$\rho_i$		0.608	0.713	0.763	0.803	0.835	0.859	0.891	0.902	0.912	0.918
			0.414	0.52	0.603	0.688	0.717	0.782	0.804	0.822	0.838
				0.264	0.4	0.5	0.574	0.672	0.706	0.734	0.757
					0.178	0.33	0.431	0.562	0.608	0.645	0.676
						0.143	0.285	0.452	0.509	0.556	0.595
							0.125	0.341	0.411	0.467	0.514
								0.229	0.311	0.378	0.432
										0.288	0.351
										0.197	0.268

Таблиця 2 ( $\xi=0.2, n=2$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	4.82	6.78	9.483	12.86	20.03	23.94	27.96	31.81	35.612	39.501	43.48
$\rho_i$		0.502	0.668	0.754	0.844	0.869	0.899	0.901	0.912	0.92	0.928
			0.286	0.502	0.685	0.738	0.771	0.808	0.823	0.841	0.855
				0.227	0.526	0.604	0.661	0.703	0.735	0.761	0.783
					0.365	0.472	0.549	0.603	0.647	0.682	0.711
						0.339	0.436	0.504	0.558	0.601	0.638
							0.321	0.404	0.469	0.521	0.566
								0.304	0.381	0.442	0.493
									0.291	0.362	0.42
										0.281	0.349

Таблиця 3 ( $\xi=0.3, n=2$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	4.046	6.219	13.89	18.42	22.75	31.686	33.293	36.068	40.604	45.027	49.52
$\rho_i$		0.437	0.772	0.83	0.862	0.901	0.958	0.913	0.928	0.93	0.937
			0.538	0.657	0.723	0.801	0.871	0.826	0.845	0.86	0.873
				0.484	0.584	0.708	0.776	0.738	0.768	0.791	0.81
					0.444	0.602	0.682	0.651	0.69	0.721	0.746
						0.502	0.587	0.564	0.613	0.65	0.683
							0.492	0.476	0.535	0.581	0.619
								0.388	0.457	0.521	0.555
									0.388	0.41	0.492
										0.371	0.429

Таблиця 4 ( $\xi=0.5, n=2$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k <sub>i</sub>	2.961	12.959	13.48	25.34	31.586	37.84	44.103	50.371	56.642	62.916
ρ <sub>i</sub>		0.756	0.965	876	0.901	0.917	0.929	0.938	0.945	0.95
			0.744	751	0.801	0.834	0.857	0.875	0.889	0.9
				627	0.701	0.751	0.786	0.812	0.834	0.85
					0.601	0.667	0.714	0.75	0.778	0.8
						0.584	0.645	0.688	0.723	0.75
							0.572	0.605	0.617	0.7
								0.563	0.611	0.65
									0.556	0.6
									0.55	

Таблиця 5 (ξ=0.1, n=1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k <sub>i</sub>	4.096	7.514	10.924	14.346	17.784	21.233	24.691	28.155	31.624	35.096	38.57
ρ <sub>i</sub>		0.585	0.712	0.782	0.824	0.853	0.873	0.889	0.901	0.911	0.919
			0.424	0.562	0.647	0.705	0.746	0.777	0.802	0.881	0.837
				0.342	0.47	0.566	0.618	0.665	0.702	0.732	0.756
					0.292	0.408	0.491	0.554	0.603	0.642	0.674
						0.259	0.363	0.442	0.503	0.552	0.593
							0.235	0.339	0.404	0.469	0.511
								0.218	0.304	0.373	0.43
									0.204	0.284	0.348
									0.194	0.267	
										0.185	

Таблиця 6 (ξ=0.3, n=1)

I	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k <sub>i</sub>	4.829	9.21	13.625	18.077	22.542	27.014	31.49	35.989	40.45	44.932	49.058
ρ <sub>i</sub>		0.661	0.771	0.827	0.861	0.885	0.9	0.913	0.923	0.93	0.935
			0.539	0.658	0.721	0.767	0.801	0.826	0.845	0.86	0.891
				0.479	0.582	0.651	0.701	0.738	0.767	0.79	0.808
					0.442	0.536	0.601	0.651	0.689	0.72	0.744
						0.418	0.501	0.563	0.618	0.65	0.681
							0.401	0.476	0.534	0.584	0.618
								0.388	0.456	0.511	0.554
									0.379	0.441	0.441
									0.371	0.427	
										0.304	

Таблиця 7 (ξ=0.5, n=1)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k <sub>i</sub>	6.465	10.737	18.922	25.188	31.461	37.736	44.015	50.294	56.574	62.855	69.136
ρ <sub>i</sub>		0.792	0.835	0.876	0.903	0.917	0.924	0.938	0.945	0.95	0.955
			0.668	0.751	0.8	0.834	0.858	0.875	0.889	0.9	0.904
				0.626	0.701	0.75	0.786	0.813	0.834	0.85	0.864
					0.601	0.667	0.715	0.79	0.778	0.8	0.818
						0.584	0.643	0.688	0.722	0.75	0.773
							0.572	0.625	0.667	0.7	0.727
								0.563	0.611	0.65	0.682
									0.55	0.6	0.637
									0.55	0.591	
										0.546	

Таблиця 8 (n=1)

i	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
ξ=0.6 (k <sub>0</sub> =7.982)							ξ=0.7 (k <sub>0</sub> =10.557)					
k <sub>i</sub>	15.779	23.611	30.041	39.3	47.149	55	62.851	21.249	31.448	41.912	48.215	62.848
ρ <sub>i</sub>	0.802	0.914	0.913	0.919	0.934	0.943	0.95	0.849	0.9	0.983	0.958	0.95
		0.763	0.81	0.84	0.867	0.886	0.9		0.8	0.916	0.896	0.9
			0.706	0.76	0.8	0.929	0.85			0.844	0.83	0.85
				0.681	0.734	0.772	0.8				0.765	0.8
					0.667	0.714	0.75					0.75
						0.658	0.7					
						0.65						

k<sub>0</sub> = 47.142; k<sub>1</sub> = 31.443 (ρ<sub>1</sub> = 0.91); k<sub>2</sub> = 47.142 (ρ<sub>1</sub> = 0.934, ρ<sub>2</sub> = 0.867)

Таблиця 9 (ξ=0.1, n=0)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	3.806	7.196	10.69	14.087	17.556	21.032	24.512	27.994	31.478	34.963	38.449
$\rho_i$		0.574	0.708	0.779	0.882	0.852	0.872	0.888	0.901	0.91	0.918
			0.414	0.556	0.644	0.702	0.744	0.776	0.801	0.82	0.837
				0.335	0.465	0.553	0.616	0.664	0.701	0.732	0.755
					0.287	0.404	0.488	0.552	0.601	0.641	0.673
						0.255	0.36	0.44	0.501	0.551	0.592
							0.232	0.388	0.402	0.461	0.51
								0.216	0.302	0.371	0.428
									0.203	0.283	0.347
										0.192	0.265
											0.185

Таблиця 10 ( $\xi=0.4, n=0$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	5.303	10.515	15.739	20.968	26.199	31.432	36.666	41.20	47.135	52.37	56.907
$\rho_i$		0.705	0.802	0.851	0.881	0.901	0.915	0.934	0.934	0.94	0.951
			0.602	0.701	0.76	0.801	0.83	0.858	0.867	0.88	0.897
				0.551	0.642	0.701	0.743	0.782	0.8	0.82	0.842
					0.521	0.601	0.658	0.706	0.734	0.76	0.787
						0.501	0.571	0.629	0.667	0.7	0.731
							0.486	0.553	0.6	0.64	0.677
								0.476	0.534	0.58	0.621
									0.467	0.52	0.566
										0.46	0.51
											0.455

Таблиця 11 ( $\xi=0.5, n=0$ )

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k_i$	6.328	12.955	18.87	25.148	31.429	37.7	43.993	50.274	58.104	62.839	70.673
$\rho_i$		0.753	0.835	0.876	0.9	0.917	0.93	0.938	0.982	0.95	0.985
			0.668	0.751	0.801	0.834	0.857	0.875	0.933	0.9	0.945
				0.626	0.701	0.75	0.786	0.813	0.879	0.85	0.856
					0.601	0.667	0.715	0.75	0.824	0.8	0.811
						0.584	0.643	0.688	0.771	0.75	0.767
							0.57	0.625	0.716	0.7	0.722
								0.563	0.622	0.65	0.678
									0.554	0.6	0.633
										0.55	0.589
											0.545

Проведені розрахунки частот і форм коливань круглої шарнірно закріпленої пластинки при різних співвідношеннях внутрішнього і зовнішнього діаметрів пластинки (параметр  $\xi$ ) до 10 форми. Наведені результати доповнюють дані, які приведені в справочній літературі [2], [5].

**Висновки.**

1. Складено рівняння для визначення частотного параметра кільцевої шарнірно-закріпленої пластинки при різних значеннях вузлових діаметрів ( $n=0,1,2$ ).
2. Проведені результати розрахунків частотного параметра при різних значеннях вузлових діаметрів ( $n=0,1,2$ ) і при різних числах вузлових кілець ( $s=0,1...10$ ).
3. Визначено положення вузлових діаметрів.
4. Визначені частоти і форми коливань шарнірно закріплених кідьцевих пластин можуть бути використані в процесі проектування елементів приладів і машин.

**Список літератури**

1. Сахаров И.Е. Частоты собственных колебаний кольцевых пластинок., Изв. АН СССР,ОТН, 1957, №5.
2. Гонткевич В.С.Собственные колебания пластин и оболочек .Справочное пособие., Наукова думка, К.,1964,-287с.
3. Вайнберг Д.В. «Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин»,К., «Будівельник»,1973,-488с.
4. Филиппов А.П.Колебания деформируемых систем., Изд.2-е.М., «Машиностроение», 1970, -526с.
5. Справочник по динамике сооружений. Под.ред.Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича. М., Стройиздат,1972.-511с.