

УДК 678.057.3:532.55

Коваль А.Д., к.т.н., доц.; Ногин Н.В., к.ф.-м.н., доц.; Разави С.Ф.  
КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА В СИСТЕМАХ СМАЗКИ С КОНИЧЕСКИМ ЗАЗОРОМ

Koval O., Nogin N., Razavi S.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine (koval\_a\_d@ukr.net)

### THE DEFINITION OF TORQUE IN SYSTEMS OF GREASE WITH CONICAL CLEARANCE

*В данной статье предпринята попытка провести исследования, связанные с изучением течения смазочного материала в коническом зазоре при условии вращения внутреннего конуса с заданной частотой.*

*Представлено решение задачи об определении крутящего момента в коническом зазоре и сопоставлено с аналогичным результатом для зазора между вращающимися коаксиальными цилиндрами. Опыты проводились на модернизированном для таких целей ротационном вискозиметре. В качестве рабочих жидкостей использовались глицерин и смазки различных типов.*

*Полученные результаты могут позволить решить задачу о гидравлическом сопротивлении движению смазки в коническом зазоре, что в свою очередь связано с реологическими свойствами смазочных сред.*

*Это является, по нашему мнению, актуальным при рассмотрении задач для ряда узлов смазки, особенно, если учесть особенности гидродинамики в целевых конических зазорах, где принципиальное значение имеют силы трения между вращающимися поверхностями.*

*Ключевые слова:* системы смазки; конический зазор; крутящий момент; вращающийся конус

#### Введение

Одной из актуальных проблем теории жидкостной смазки является проблема, связанная с поведением жидкости в зазорах между коническими поверхностями.

Особенности такого поведения характеризуются тем, что движение жидкости осуществляется в зазоре с изменяющейся по длине кривизной поверхности, что существенно отличает данную задачу от задачи про поведение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами [1].

Исследование пар трения различного типа машин показывает, что при решении подобного типа задач возникают гидродинамические проблемы, связанные с родом задач теории ламинарных течений. Среди таких проблем актуальными являются проблемы смазки конических поверхностей (рис. 1а, б). В обоих случаях, как при осевом, так и при вращательном движении внутреннего конуса течение является нестабилизированным, в котором проявляются силы инерции от конвективного ускорения, и в зависимости от реологических свойств смазочного материала может быть описано соответствующей системой уравнений. Так, например, для первого случая (рис. 1.а) решение задачи погружения конуса в конический объем может быть рассмотрено в соответствие с анализом, проведенным в работе [2].

При пренебрежении силами инерции, когда течение можно считать стабилизированным, уравнение движения в цилиндрической системе координат для случая осевого перемещения конуса предлагается рассматривать в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}; \quad \frac{dp}{dr} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} + \frac{du_r}{dx} = 0.$$

И при граничных условиях вида

при  $r = R_1$ ,  $u_x = -u_0$ ,  $u_r = 0$ ;

при  $r = R_2$ ,  $u_x = 0$ ,  $u_z = 0$ ;

при  $r = H$ ,  $(R_1 < r < R_2)$ ,  $p = 0$ .

автором работы [1] были получены следующие результаты:

- для осевой компоненты скорости  $u_x$

$$u_x = -u_0 \frac{\ln \frac{r}{R_2}}{\ln \frac{r}{R_1}} + \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dr} \left( r - \frac{R_1 \ln \frac{r}{R_2} - R_2 \ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \right);$$

- осевая составляющая силы трения F:

$$F = 2\pi\mu u_0 \int_0^H \frac{(R_2^2 - R_1^2) dx}{(R_2^2 + R_1^2) \ln \frac{R_2}{R_1} - (R_2^2 - R_1^2)}.$$

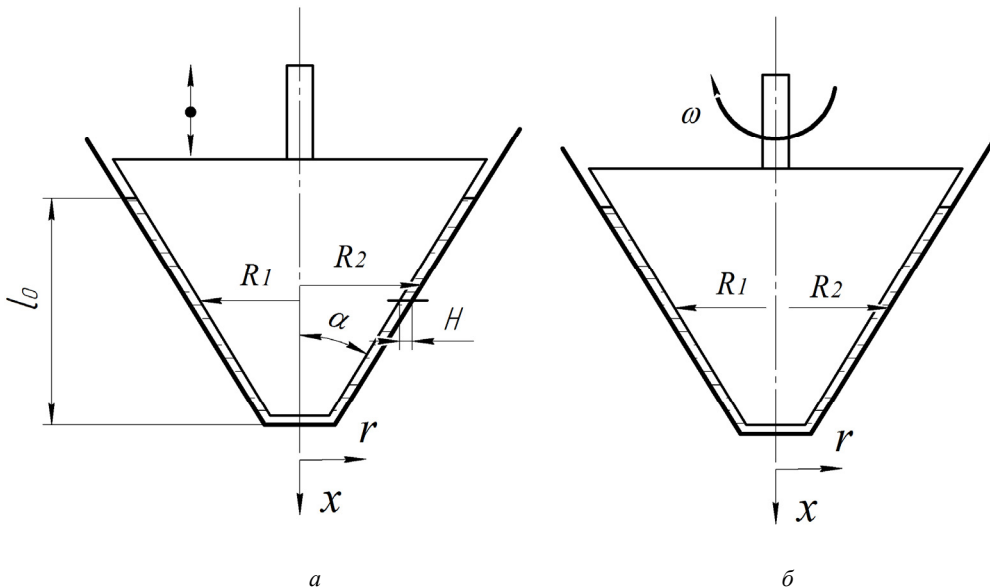


Рис. 1. Схемы типов смазки конических поверхностей при осевом перемещении внутреннего конуса в смазочной жидкости (а) и при вращении внутреннего конуса и течения жидкости в щелевом зазоре (б)

Если осуществляется погружение конуса в коническую ёмкость с тем же углом конусности при условии что

$$R_1 = l \sin \alpha = x \tan \alpha ; R_2 = \tan \alpha (1 + x) ; H = R_2 - R_1 ,$$

была получена [1] следующие зависимости

$$F = 2\pi\mu u_0 \frac{H^2}{l^2} , p = p_1 = \frac{3}{2} \pi\mu u_0 \frac{H^2}{l^2} ,$$

при

$$H = \frac{\sqrt{\frac{3l}{(4l_0^3 - l^3)} - 3l^2}}{6l} ,$$

где  $l_0$  – начальный уровень смазочной жидкости в конической ёмкости,  $l$  – текущий уровень жидкости,  $x$  – текущая координата.

Течению аномальновязких жидкостей в зазорах посвящен ряд работ [3-7].

**Цель работы**

Учитывая отсутствие решений для случая вращательного движения внутреннего цилиндра, в статье предпринята попытка провести исследования, связанные с определением крутящего момента между вращающимися коническими поверхностями. Следует отметить, что решение задачи может быть усложнено тем фактом, что жидкости могут проявлять аномалии вязкости. В данной работе предпринята попытка решить задачу для ньютоновской жидкости.

**Исследование**

Следует отметить, что для данного случая (когда внутренний конус вращается вокруг своей оси с частотой вращения  $n$ ) уравнение движения при условии стабилизированного течения, может иметь вид

$$\frac{d^2 u_\phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\phi}{dr} - \frac{u_\phi}{r^2} = 0 ,$$

при условии, что

$$u_\phi = \omega r .$$

В работе [8] на основе анализа равновесия сил в коническом зазоре была получена следующая расчетная зависимость

$$\omega_{\varphi}(\varphi) = \frac{c}{\mu} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi}, \quad \text{где } c = \omega \mu \left[ \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right]^{-1}.$$

На основании данных расчетных зависимостей авторы работы [2] предложили соотношение для определения касательных напряжений, окружной скорости и скорости сдвига, а именно

$$\tau = \frac{\omega \mu}{\sin^2 \varphi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sin^3 \theta} \right]^{-1},$$

$$u_{\varphi} = \omega \rho \sin \varphi \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sin^3 \theta} \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right)^{-1},$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega}{\sin^2 \varphi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi}.$$

Таким образом, для крутящего момента, характеризующего смазочные свойства жидкости, было получено выражение

$$M_{кр} = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\sin \alpha} [r]_{\varphi=\alpha} \varphi^2 \sin^2 \alpha d\varphi = \frac{2\pi \omega r_n^3 \mu}{3 \sin^2 \alpha} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right]^{-1}.$$

На основании представленного анализа течения в коническом можно получить зависимость следующего вида

$$\omega(r_0) = \frac{1}{2} \int_{r_0/s}^{r_0} \frac{f(\rho) d\rho}{\sqrt{\rho(\rho - \rho_0 \sin^2 \alpha)}}, \quad (1)$$

предполагая, что  $s = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} > 1$ .

При  $s=1$  вместо соосных конусов выражение (1) определяет зависимость для коаксиальных цилиндров.

Данное уравнение является интегральным уравнением Вольтерра первого рода.

Если  $\omega(r_0) = \omega_2 r$ , тогда  $f(r_0) = f_1(r)$ .

На основании предыдущих соотношений, если ввести обозначение

$$\lambda = \sqrt{\frac{r}{r - r_B \sin \alpha}},$$

Получим

$$\omega_2 r_1 = \frac{f_1}{2} \int_{\frac{r_B}{s^2}}^{r_0} \sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho_B \sin^2 \alpha}} d\rho = \frac{f_1}{2} \sin^2 \alpha r_0 \int_{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}}^{\sin^2 \alpha} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda}}, \quad (2)$$

Если ввести обозначение  $I_1(\alpha, \beta) = \int_{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}}^{\sin^2 \alpha} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda}}$ , то в результате несложных преобразований получим

$$I_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\frac{1}{\sin \alpha} - 1}{\frac{1}{\sin \beta}} \right) - \ln \frac{(\sin \alpha)^{-1}}{(\sin \beta)^{-1}}.$$

На основании уравнения (2) можно записать, что

$$dr = r_B \sin^2 \alpha \frac{[2\lambda(\lambda^2 - 1) - 2\lambda^3]}{(\lambda^2 - 1)^2} d\lambda = r_B \sin^2 \alpha \frac{-2\lambda d\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2}.$$

Верхний и нижний предел интегрирования для выражения  $\omega(r_B)$  могут быть представлены следующим соотношением

$$\sqrt{\frac{r_B}{r_B \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \sqrt{\frac{r_B}{r_B (1 - s^2 \sin^2 \alpha)}} = \sqrt{\frac{1}{1 - s^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Таким образом

$$\omega(r_B) = - \frac{1}{\cos \alpha} \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha} (\lambda^2 - 1)^2}.$$

Данный интеграл может быть вычислен по частям.

Таким образом, для величины напряжения сдвига  $\tau_B$  было получено следующее выражение:

$$\tau_B = \frac{f_1}{2 \sin^2 \alpha \omega_2} \left[ \cos \alpha - \frac{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}}{s^2} \right] - \frac{1}{4 \omega_2} \left[ \ln \tan \frac{\alpha}{2} - \ln \frac{1-\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}}{1+\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}} \right].$$

Определив напряжение в коническом зазоре  $\tau_B$  [8], можно определить силы вязкого трения, а следовательно и крутящий момент

$$M = \frac{2\pi\mu\omega r^3}{3 \sin^2 \alpha I_2} = \frac{2\pi\mu r^3}{3 \sin^3 \alpha I_2} \left[ \left( \cos \alpha - \frac{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}}{s^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \ln \tan \frac{\alpha}{2} - \ln \frac{1-\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}}{1+\sqrt{1-s^2 \sin^2 \alpha}} \right) \right] \quad (3)$$

где

$$I_2 = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} = \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sin^4 \varphi} = - \int_{\cos \beta}^{\cos \alpha} \frac{dr}{[(r-1)(r+1)]^2}.$$

После преобразований в знаменателе формулы для момента вместо  $I_2$  введено следующее соотношение

$$I_2 = \frac{1}{4} \ln \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} - \frac{1}{4} \ln \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}} - \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \right] + \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} \right] \quad (4)$$

Формулы (3) и (4) позволяют получить окончательную расчетную формулу для момента  $M$ . Таким образом, определен крутящий момент для второго из рассматриваемых в работе случая течения смазок в конических зазорах, который сводится к решению уравнения Вольтерра 1-го рода.

Как видно из приведенного выражения для крутящего момента, величина  $M$  прямо пропорциональна вязкости, частоте вращения конуса и его внутреннему радиусу. Вместе с тем, как это видно из выражения для  $I_2$

эта величина существенно связана с соотношением  $\alpha$  и  $\beta$  (т.е. между величинами углов конусности). Вместе с тем следует отметить, что в приведенное соотношение не входит величина, характеризующая ширину зазора между коническими поверхностями, что характеризует тот факт, что данные формулы справедливы лишь при определенных значениях величины  $h$ . Данный факт приводит к необходимости проведения физического моделирования с целью уточнения представленных зависимостей.

Такое моделирование было проведено на стенде (рис.2), базой для которого стал ротационный вискозиметр Реотест-2.

Эксперименты проводились с использованием таких смазочных материалов как «Литол-24», «Графитная смазка», «Унимаст» и некоторых гидравлических жидкостей, которые по своим реологическим характеристикам близки к ньютоновским средам. В качестве примера (рис.3) представлены полученные в ходе экспериментов зависимости, которые показывают качественную картину влияния приведенной частоты вращения  $n_{пр}$  на значение приведенного крутящего момента  $M_{кр,пр}$ .

Эти зависимости имеют линейный характер (рис.3) при различных значениях зазоров, что позволяет сделать вывод об отсутствии влияния величины зазора (в рассмотренном диапазоне его изменения) на упрощенную функциональную зависимость [8]

$$M_{кр} = \frac{2\pi\mu\omega r^3}{3 \sin^2 \alpha}.$$



Рис. 2. Ротационный вискозиметр Реотест-2, модернизированный для проведения экспериментов

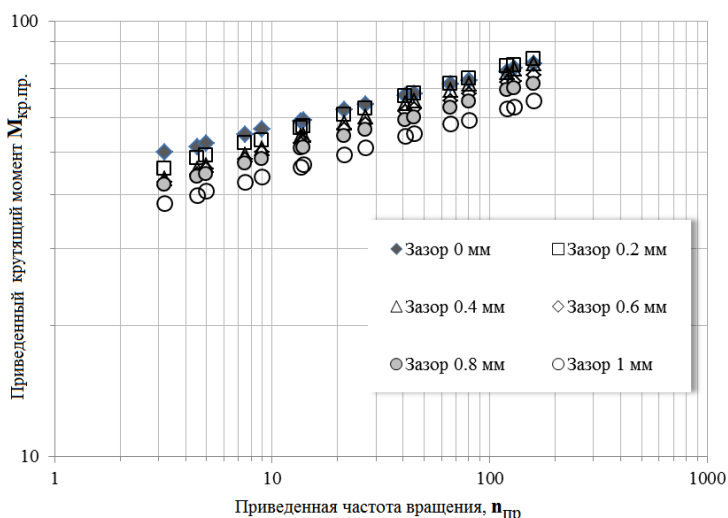


Рис. 3. Зависимость приведенного крутящего момента от приведенной частоты вращения

крутного моменту в конічному зазорі і співставлено з аналогічним результатом для зазору між коаксіальними циліндрами, що обертаються. Досліди проводилися на модернізованому для таких цілей ротаційному віскозиметрі. В якості робочих рідин використовувалися гліцерин, оливи, та мастила різних типів.

Отримані результати можуть дозволити розв'язати задачу про гідравлічний опір руху мастила в конічному зазорі, яка в свою чергу пов'язана з реологічними властивостями рідин, які використовуються для змащування.

На нашу думку це є актуальним для ряду вузлів тертя, особливо, якщо будуть враховані особливості гідродинаміки в цілих конічних зазорах, де принципове значення мають сили тертя між обертовими поверхнями.

**Ключові слова:** системи змащення; конічний зазор; обертаючий момент; конус, що обертається

**Abstract.** This article attempts to conduct research that related with the studying of grease flow in conical clearance, providing rotation of the inner cone with predetermined frequency.

Moreover, presented decision of the definition of torque in the conical clearance and compared with the similar result of the clearance between rotating coaxial cylinders. The experiments were conducted on a modernized for this purpose rotary viscometer. Glycerin and various types of grease were used as working liquids.

The results can solve the problem of hydraulic resistance movement of grease in the conical clearance, which associated with rheological properties of grease environments.

In our opinion, this is actual for the consideration of problems for a number of grease units, especially in considering features of hydrodynamics in the slotted conical clearances, where is the fundamental importance of the friction force between the rotating surfaces.

**Keywords:** lubrication system; conical clearance; torque; rotating cone

## References

- Voskresenskij, V.A. and D'jakov, V.I. (1980), *Raschjot i proektirovanie opor skol'zhenija (zhidkostnaja smazka)* [Calculation and design of sliding bearings (liquid lubricant)], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
- Targ, S.M. (1951), *Osnovnye zadachi teorii laminarnyh techenij* [The main tasks of the theory of laminar flow], Gosteh teorizdat, Moscow, Russia.
- Garg, H.C., Kumar, V. and Sharda H.B. (2009), *Thermohydrostatic analysis of capillary compensated symmetric hole-entry hybrid journal bearing operating with non-Newtonian lubricant*. Industrial Lubrication and Tribology. Vol. 61, no. 1.
- Gecim, B.A. (1990), *Non-Newtonian Effect of Multigrade Oils on Journal Bearing Performance*, Tribology Transaction. Vol.3.
- Li, X.K., Gwynllwy, D.Rh., Davies, A.R. and Phillips T.N. (2000), *On the influence of lubricant on dynamics of two-dimensional journal bearings*. Non-Newtonian Fluid Mech. Vol. 93.
- Paranjpe, R.S. (1992), *Analysis of Non-Newtonian Effects in Dynamically Loaded Finite Journal Bearings Including Mass Conserving Cavitation*. Trans ASME Jour of Trib. Vol. 114.
- Williamson, B.P., Bates, T.W., Coy, R.C. and Milton, A.L. (1997), *The viscoelastic properties of multigrade oils and their effect on journal-bearing characteristics*. Non-Newtonian Fluid Mech. Vol. 73.
- Vinogradov, G.V., Belkin, I.M., Vinogradov, G.V. and Leonov A.I. (1968), *Rotacionnye pribory. Izmerenie vjazkosti i fiziko - mehanicheskih harakteristik materialov* [Rotary power devices. Measurement of viscosity and physical - mechanical characteristics], in Vinogradov, G.V.(ed.), Mashinostroenie, Moscow, Russia.

Подана до редакції 04.10.2016